ÉCOLE NAVALE

Deuxième composition de mathématiques

Concours 1993

Durée : 4 heures

La rédaction et la clarté des raisonnements interviennent dans la note.

On note : E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

E_0 le sous-espace des fonctions constantes.

E_1 le sous-espace des fonctions nulles sur $\mathbb{R}^-$.

E_2 le sous-espace des fonction nulles sur $\mathbb{R}^+$.

I

1. – Montrer que E est somme directe de E_0, E_1 et E_2.

   Pour i, j, k, deux à deux distincts dans $\{0, 1, 2\}$, on note p_i la projection sur E_i parallèlement à $E_j \oplus E_k$.

2. – A tout élément f de E, on associe la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*)\ g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \text{ et } g(0) = f(0).$$

   Démontrer que g appartient à E.

3. – On note Φ l'application qui à f associe g ; prouver que Φ est un endomorphisme de E. Φ est-il injectif ? Φ est-il surjectif ?

4. – Démontrer que pour $i \in \{0, 1, 2\}$, les sous-espaces E_i sont stables par Φ et que $p_i \circ \Phi = \Phi \circ p_i$; on note alors Φ_i l'endomorphisme de E_i induit par Φ.

5. – Soit λ un nombre réel non nul.

   Déterminer toutes les fonctions dérivables de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})\ \lambda x f'(x) + (\lambda - 1) f(x) = 0.$$

6. – Déterminer l'ensemble S des valeurs propres réelles de Φ_1, puis l'ensemble T des valeurs propres réelles de Φ. Représenter les ensembles S et T.

7. – Pour λ dans S (respectivement dans T), on note E_1^λ (respectivement E^λ) le sous-espace propre de Φ_1 (resp Φ) associé à la valeur propre λ.

   Pour λ dans S déterminer une base de E_1^λ.

   Pour λ dans T déterminer une base de E^λ.

II

On note A, B, C les sous-espaces vectoriels de E suivants :

A est l'ensemble des fonctions de E ayant pour limite 0 en $+\infty$ et $-\infty$.

B est l'ensemble des fonctions uniformément continues sur $\mathbb{R}$.

C est l'ensemble des fonctions telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge

1. — *a.* Montrer que $A \subseteq B$ et que l'inclusion inverse est fausse.

   b. Prouver que $B \cap C \subseteq A$ et que l'inclusion inverse est fausse.

2. — Démontrer que pour tout élément f de B, il existe des réels (a, b) tels que :
$$(\forall x \in \mathbb{R}),\ |f(x)| \leqslant a|x| + b.$$

3. — Prouver que A et B sont stables par Φ. Qu'en est-il de C et $A \cap C$?

4. — On note D l'ensemble des f de E telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx$ converge.

   a. Prouver que D est un sous-espace vectoriel de E.

   b. Montrer que A n'est pas inclus dans D, ni D dans A ; étudier de même les inclusions entre B et D.

5. — Pour tout couple (f, g) d'éléments de D, on pose $\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$.

   Vérifier que la forme hermitienne $(f, g) \to \langle f|g\rangle$ est définie positive.

   On pose $\|f\| = \langle f|f\rangle^{\frac{1}{2}}$.

6. — *a.* Soient a et b tels que $0 < a < b$ et f dans D, $g = \Phi(f)$, montrer que :
$$\int_a^b |g(x)|^2\,dx \leqslant a|g(a)|^2 + 2\left[\int_0^{+\infty} |f(x)|^2\,dx \cdot \int_a^b |g(x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

   Indication : on introduira la primitive F de f nulle en 0 et on fera une intégration par parties.

   b. Démontrer que D est stable par Φ.

7. — Démontrer que $(\forall f \in D)\ \|\Phi(f)\|^2 = 2\,\mathrm{Re}\langle\Phi(f)|f\rangle$.

8. — On munit D de la norme $\|\ \|$ et on note Φ_D l'endomorphisme de D induit par Φ.

   Prouver que Φ_D est continu et que pour tout f dans D, $\|\Phi_D(f)\| \leqslant 2\|f\|$.